



III Международный школьный конкурс РЭШ

1 марта — 11 апреля 2012 года

Конкурсные задания

Вам предлагается решить 11 заданий. Помните, что ответ на любой вопрос должен быть аргументирован. Старайтесь делать все логические переходы как можно более ясными и строгими. Все промежуточные расчеты должны быть приведены в полном объеме. Только лишь ответ без объяснения принесет минимальное число баллов. Если Вы в своих рассуждениях опираетесь на какие-либо дополнительные предпосылки, не забудьте их сформулировать.

Удачи!

Задача 1.

(5 баллов)

Предприниматель М. придумал, как сделать всех людей богаче. Он разослал письма 10 своим друзьям с предложением каждому из них заплатить М. по 100 рублей, а затем отправить такие же письма другим своим 10 друзьям с предложением каждому из них прислать отправителю письма 100 рублей и отправить такие же письма другим своим 10 друзьям и так далее. В итоге все участники получают выгоду: каждый (кроме самого М.) отдает 100 рублей и получает взамен 1000 рублей. Действительно ли эта схема позволит всем ее участникам заработать?

Задача 2.

(5 баллов)

Один экономист провел большое исследование, в котором оценил для каждого региона России численность населения, число занятых, среднюю заработную плату, уровень расходов населения и некоторые другие демографические и социально-экономические параметры. Когда у него спросили, какова средняя зарплата в России, он сказал, что это легко подсчитать, сложив средние зарплаты по регионам и разделив затем эту сумму на число регионов. Через несколько секунд экономист заметил, что такой способ даст не совсем корректную оценку средней заработной платы в России и что нужно использовать другой метод расчета. Как Вы думаете, почему предложенный способ расчета даст неправильную величину среднероссийской заработной платы? Какой способ расчета Вы бы предложили, имея результаты данного исследования?

Задача 3.

(5 баллов)

Иногда люди (фирмы, правительства) предпринимают затратные действия, не несущие им прямой выгоды. Так, испанский конкистадор Эрнан Кортес сжег свои корабли при высадке в Мексике; многие государства подписали Киотский протокол, взяв на себя обязательства ограничить уровень выбросов в атмосферу вредных побочных продуктов промышленного производства; люди покупают дорогие абонементы в фитнес-центры, зная, что заведомо не смогут часто туда ходить. Что объединяет все эти действия? Зачем люди могут так поступать?

Задача 4.

(7 баллов)

Когда правительство некоторой страны обсуждает возможность повышения возраста выхода на пенсию, наибольший протест это вызывает у тех жителей, которые должны были бы совсем скоро стать пенсионерами. Люди среднего возраста, а также молодежь относятся к повышению пенсионного возраста более терпимо.

- а) Не странно ли это? Казалось бы, повышение возраста коснется каждого гражданина, а не только того, кто собирается уйти на пенсию в ближайшее время. Чем Вы можете объяснить этот факт?
- б) Эксперты предложили правительству следующую схему повышения на 5 лет возраста выхода на пенсию: правительство сегодня объявляет, что с этого года в течение 10 лет пенсионный возраст будет повышаться на полгода каждый год. Каковы преимущества и недостатки этого способа?

Задача 5.

(7 баллов)

В Министерстве транспорта заметили, что вскоре после повышения тарифов на электроэнергию растут цены на железнодорожные услуги, причем как на перевозки тепловозами, так и электровозами. С целью удержания роста цен на перевозки они предложили ограничивать отпускные тарифы на электроэнергию для железнодорожников. Как Вы думаете, позволит ли регулирование тарифов на электроэнергию избежать роста цен на железнодорожные перевозки?

Задача 6.

(7 баллов)

- а) Известны примеры, когда производители офисных программных пакетов (состоящих из текстового редактора, электронной таблицы, редактора презентаций и т. п.) продают разные варианты этих пакетов по разным ценам. Например, пакет «Office для дома и учебы» компании *Microsoft*, состоящий из четырех основных программ, стоит в 7,5 раз дешевле, чем пакет «Office профессиональный», состоящий из семи программ (тех же четырех, что в первом пакете, и трех дополнительных). По отдельности покупать приложения нельзя. Объясните, как объединение программ в такие наборы позволяет компании увеличить прибыль по сравнению с продажей программ по отдельности.
- б) Кроме объединения программ в комплекты, у политики ценообразования компании *Microsoft* есть также следующая особенность. Если Вы хотите установить пакет «Office для дома и учебы» на три компьютера, то покупка обойдется Вам не в три раза дороже, чем если бы Вы покупали программу для одного компьютера, а только в 1,35 раза. Объясните, как такая скидка покупателям, желающим приобрести несколько единиц продукта, позволяет компании *Microsoft* увеличить свою прибыль по сравнению с назначением единой цены за единицу продукции, не зависящей от объема покупки?

Задача 7.

(7 баллов)

Для борьбы с курением в США используют самые разные меры. Одной из популярных мер последних лет стал запрет на курение в ресторанах и барах. В основном такие запреты принимаются на уровне городов, поселков и округов. Исследования показали, что запрет на курение в барах и ресторанах приводит к снижению как процента курящих, так и интенсивности курения среди тех, кто продолжает курить. Впрочем, эта мера имела и побочные эффекты: оказалось, что она привела к уменьшению потребления пива и крепких спиртных напитков. Но количество дорожно-транспортных происшествий с участием пьяных водителей в местностях, где введен запрет на курение в барах и ресторанах, выросло. Как можно объяснить рост количества дорожно-транспортных происшествий с участием пьяных водителей?

Задача 8.**(7 баллов)**

По программе «Вкусное питание» Женя и Костя получают талоны, которые они могут обменять на жвачку и колу в школьной столовой. Женя получает два талона на одну жвачку каждый, Костя получает два талона на одну колу каждый, то есть Женя может сжевать две жвачки, а Костя выпить две колы в день. Однако оба мальчика любят разнообразие и предпочли бы потреблять по одной жвачке и коле в день. Кроме того, как для Жени, так и для Кости, жвачки и колы много не бывает, то есть чем больше жвачки и колы мальчики потребляют в день, тем им лучше.

- а) Могут ли мальчики устроить взаимовыгодный обмен? Если да, то каково будет распределение жвачки и колы, достигнутое в результате этого обмена?
- б) Допустим, они могут устроить только последовательный обмен: сначала Женя решает, отдавать ли один талон на жвачку Косте, а потом Костя решает, отдавать ли один талон на колу Жене. Если Костя учится в седьмом классе, а Женя — только во втором, и поэтому не может потребовать свой талон обратно в случае обмана, согласится ли Женя участвовать в таком обмене? А Костя?
- в) Изменятся ли решения мальчиков, если они договариваются, что будут производить такой обмен каждый день в течение недели? А если в течение всего учебного года?

Задача 9.**(14 баллов)**

На некоторой плоскости есть четыре города, расположенные в вершинах выпуклого четырехугольника $ABCD$. Города впервые в истории решают провести между собой спортивное соревнование — Весеннюю Олимпиаду. Поскольку ни один из городов изначально не обладает необходимой для Олимпиады инфраструктурой, на то, чтобы быть местом ее проведения, претендует любая точка плоскости (в том числе, и сами города). Каждый город хотел бы, чтобы Олимпиада прошла как можно ближе к нему.

- а) Будем называть точку проведения Олимпиады *общественно оптимальной* в случае, если сумма расстояний от нее до городов минимальна. Найдите эту общественно оптимальную точку и обоснуйте свой выбор.
- б) Представим себе ситуацию, при которой на голосование городов были бы вынесены две альтернативы: провести Олимпиаду в точке X или провести ее в точке Y (точки X и Y не совпадают). Будем говорить, что *точка X побеждает точку Y* , если при таком голосовании как минимум три города из четырех голосовали бы за X . Найдите множество точек P на данной плоскости, таких, что точку P не побеждает ни одна другая точка, отличная от P . Являются ли эти точки общественно оптимальными?

Задача 10.**(14 баллов)**

В стране Фантия очень строгое валютное и банковское регулирование. В обращении есть всего три валюты: фантики (ф), евро (€) и доллары (\$), все банки обменивают любую валюту на любую другую по единому (но разному для разных пар валют) курсу, устанавливаемому Центральным банком. В Фантии доступны следующие банковские операции:

1) **Обмен валюты.** Каждый житель за одну операцию может обменять любое количество любой валюты, имеющейся у него на руках, по установленному Центральным банком курсу. Допускается обмен нескольких разных валют (но только имеющихся сейчас на руках!) или обмен на несколько разных валют в рамках одной операции. За один день жителям запрещено совершать более трех операций с обменом валюты.

2) **Взятие кредита.** Каждый день утром, еще до начала работы касс обмена валюты, гражданин Фантии может взять в банке кредит в любой(-ых) валюте(-ах), который он обязан погасить вечером того же дня (уже после закрытия касс обмена валюты). По законам Фантии, кредит в каждой валюте можно взять только в размере, не превышающем количества этой валюты, уже имеющегося на руках. Например, если на руках есть 30 евро и 70 фантиков, то в кредит можно взять не более 30 евро и не более 70 фантиков.

3) **Создание вклада.** Каждый день утром, еще до начала работы касс обмена валюты, гражданин Фантии может открыть вклад на один день в любой(-ых) валюте(-ах), проценты по которому необходимо забрать вместе с суммой вклада в тот же день поздним вечером (уже после закрытия касс обмена валюты).

Ставки процентов за 1 день по кредитам и вкладам приведены в следующей таблице:

валюта	кредит	вклад
€	1,5 %	1 %
\$	2,25 %	1,5 %
ф	3 %	2 %

В понедельник утром Центральный банк Фантии объявил следующие обменные курсы на ближайшие три дня:

	Понедельник	Вторник	Среда
ф за один €	43	43,4	43,1
ф за один \$	33	32,9	33,6
\$ за один €	1,28	1,36	1,3

Например, в понедельник можно обменять 43 фантика на 1 евро и, наоборот, 1 евро на 43 фантика.

Представьте, что Вы — гражданин Фантии, у которого на руках есть 100 фантиков. Какое максимальное количество фантиков вы могли бы заработать к вечеру среды, если:

- по закону запрещено иметь иностранную валюту на руках в конце дня?
- можно иметь иностранную валюту на руках в том числе и в конце дня?

Приведите алгоритм Ваших действий и число фантиков, которое будет у Вас к вечеру среды.

Задача 11.**(22 балла)**

В крайнем подъезде трехэтажного общежития живут три студента-медика, каждый на своем этаже. Лифта в подъезде нет. Студенты не любят грязь, поэтому они решили скинуться и нанять уборщицу, которая бы мыла лестничные площадки напротив каждой квартиры.

Удовольствие студента зависит от того, сколько чистых площадок он встречается на пути домой. Кроме того, чем больше лестничных площадок проходит студент, пока идет домой, тем более он терпим к грязи.

Удовлетворение студента, живущего на i -м этаже, можно описать формулой:

$$U_i = 20 - (4 - i) \cdot (i - x)^2 - 2y,$$

где x — число чистых этажей на пути студента к своей комнате, а y — то число вымытых этажей, которое он профинансировал из своего кармана. В случае, если у студента одинаковое удовлетворение от финансирования мытья разного количества этажей, он предпочтет тот вариант, где ему приходится тратить меньше.

Уборщица готова мыть одну площадку за 2 доллара. При этом вне зависимости от того, кто платит, работать она начинает с нижнего этажа, потом моет второй и только потом — третий. Таким образом, студент не может заставить уборщицу помыть его этаж, если не помыты все более низкие этажи. Например, если уборщице заплатили 4 доллара, то она помоеет только 1-й и 2-й этажи независимо от того, кто платил.

В начале месяца каждый студент сообщает, уборку скольких этажей он собирается профинансировать. Каждый студент может профинансировать уборку любого целого числа этажей. Студенты дают свои обещания одновременно. Назовем *равновесием* такой набор обещаний студентов, когда ни одному из студентов по отдельности не выгодно его пересмотреть после того, как все узнали обещания друг друга.

- Сколько этажей будет вымыто в равновесии? Кто и в каком размере оплатит услуги уборщицы?
- Уборщица решила изменить свои привычки, и теперь она моет этажи сверху вниз (сначала третий, потом второй и только потом первый). Как изменятся ответы на вопросы пункта а)?
- Проработав пару недель, уборщица поняла, что первый этаж является самым грязным, так как по нему ходят три человека. Второй этаж в полтора раза чище, а площадка на третьем этаже, куда доходит только один студент, и вовсе в три раза чище той, что на первом этаже. Она решила, что по-прежнему готова брать за мытье всего подъезда 6 долларов, но только теперь оплата будет взиматься пропорционально загрязненности этажа: 3 доллара за первый этаж, 2 — за второй и 1 — за третий.

Каждый из студентов может потратить любую сумму от 0 до 6 долларов. Это решение студенты принимают одновременно. Далее уборщица смотрит на полученную сумму и вычисляет, на уборку скольких этажей этого хватает. Если при этом у нее остается излишек, которого не хватает для оплаты уборки следующего этажа, то она этот излишек никому не возвращает и следующий этаж не моет.

Соответственно, удовлетворение студента, живущего на i -м этаже, в этом случае можно описать формулой:

$$U_i = 20 - (4 - i) \cdot (i - x)^2 - z,$$

где z — это число профинансированных из своего кармана долей загрязненности от общего числа 6, а все остальные обозначения имеют прежний смысл. Как в этом случае изменятся ответы на вопросы пунктов а) и б)?

- г) Предположим, что теперь решение о том, сколько платить уборщице, принимают не студенты, а управляющая домом компания. Управляющая компания стремится максимизировать суммарную полезность трех студентов. К каким исходам это приведет в условиях пунктов а), б), в)? Как изменится суммарная полезность трех студентов в условиях пунктов а), б), в) при наличии управляющей компании?